一种分解指数算符的简洁方法

吕翠红[1]，范洪义[2]，王亚伟[1]

(1. 江苏大学 理学院 物理系，江苏 镇江 212013;
2. 中国科学技术大学 化学院 材料科学与工程系，安徽 合肥 230016)

摘要: 提出一种新的分解指数算符的方法，这种方法不仅简单易懂，而且有助于找到更多的算符恒等式.

关键词: 指数算符; 算符恒等式; Baker-Hausdorff 公式

中图分类号: O 413.1; O 411.1　　文献标识码: A　　文章编号: 1000-0712(2012)08-0004-02

量子力学和量子光学中各种物理问题的解决，都需要对很多彼此不对易的算符进行计算分解，因此找到一种分解指数算符的简洁易行的方法就显得尤其重要，这不仅可以帮助我们找到一些新的算符恒等式，而且对各种物理问题的计算可带来极大的便利.

大学物理课程中经常用到的一个算符恒等式是

$$e^{\lambda a^{+}+\mu a}=e^{\lambda a^{+}}e^{\mu a}e^{\lambda\mu/2} \tag{1}$$

其中 a、a^{+} 分别是玻色湮没算符和产生算符，满足对易关系 $[a^{+},a]=1$. 这个恒等式在构建相干态[1]时非常有用. 一般量子力学教程中，公式(1)的推导都是利用参数微分方法[2,3]，这种方法不仅麻烦而且很容易出错. 甚至一些复杂算符恒等式的推导，需要用到群论中李代数的知识[4]，这对于刚接触量子力学的人来说是比较困难的. 本文提出一种简单易懂的算符分解方法，加深学生对算符运算的理解，提高其理论计算能力.

1　分解指数算符的方法

这种方法只需要用到大家都很熟悉的 Baker-Hausdorff 公式[5]:

$$e^{A}Be^{-A}=B+[A,B]+\frac{1}{2!}[A,[A,B]]+\frac{1}{3!}[A,[A,[A,B]]]+\cdots \tag{2}$$

我们的方法总结如下:

要分解指数算符 $\exp\{B+C\}$，第一步，是找到满足关系式 $[A,B]=C$ 和 $[A,[A,B]]=0$ 的算符 A，然后由 Baker-Hausdorff 公式得到

$$\exp\{B+C\}=\exp\{B+[A,B]\}=e^{A}e^{B}e^{-A} \tag{3}$$

第二步，再次利用公式(2)找到算符 $e^{A}e^{B}$ 和 $e^{B}e^{A}$ 的关系，即 $e^{A}e^{B}=e^{B}(e^{-B}e^{A}e^{B})=e^{B}e^{A+W}$，如果 e^{A+W} 可进一步分解为 $e^{V}e^{A}$，则就得到算符恒等式 $\exp\{B+C\}=e^{B}e^{V}$.

2　方法举例

下面利用此方法来推导公式(1).

利用 Baker-Hausdorff 公式，可以给出

$$\exp\left(\frac{\mu}{2\lambda}a^{2}\right)a^{+}\exp\left(-\frac{\mu}{2\lambda}a^{2}\right)=a^{+}+\left[\frac{\mu}{2\lambda}a^{2},a^{+}\right]+\cdots=a^{+}+\frac{\mu}{\lambda}a \tag{4}$$

那么接着就有

$$\exp\left(\frac{\mu}{2\lambda}a^{2}\right)e^{\lambda a^{+}}\exp\left(-\frac{\mu}{2\lambda}a^{2}\right)=e^{\lambda a^{+}+\mu a} \tag{5}$$

式(5)左边前两项左乘单位算符 $e^{\lambda a^{+}}e^{-\lambda a^{+}}=1$，再次利用式(2)可将其分解为

$$e^{\frac{\mu}{2\lambda}a^{2}}e^{\lambda a^{+}}=e^{\lambda a^{+}}e^{-\lambda a^{+}}e^{\frac{\mu}{2\lambda}a^{2}}e^{\lambda a^{+}}=e^{\lambda a^{+}}e^{\frac{\mu}{2\lambda}(a+\lambda)^{2}} \tag{6}$$

将式(6)代入到式(5)中就给出

$$e^{\lambda a^{+}+\mu a}=e^{\lambda a^{+}}e^{\frac{\mu}{2\lambda}(a+\lambda)^{2}}e^{-\frac{\mu}{2\lambda}a^{2}}=e^{\lambda a^{+}}e^{\mu a}e^{\lambda\mu/2} \tag{7}$$

因此得到算符恒等式(1).

这种方法可以被推广到更复杂的情况. 例如，要分解算符 $\exp(\lambda P+\mu Q^{n})$，其中 Q 和 P 是坐标算符和动量算符且满足正则对易关系 $[Q,P]=\mathrm{i}$，$\hbar=1$. 注意到 Q 和 P 之间存在关系 $[Q^{n+1},P]=\mathrm{i}(n+1)Q^{n}$，再由式(2)，就得到

$$\exp(\lambda P+\mu Q^{n})=\exp\left[\frac{-\mathrm{i}\mu}{(n+1)\lambda}Q^{n+1}\right]\cdot$$

收稿日期: 2012-02-20; 修回日期: 2012-03-14

基金项目: 江苏大学高级人才基金资助项目(1281190029); 国家自然科学基金项目(21146004)资助

作者简介: 吕翠红(1983—)，女，山东菏泽人，江苏大学理学院物理系讲师，博士，主要从事理论物理教学与科研工作.

$$\exp(\lambda P)\exp\left[\frac{\mathrm{i}\mu}{(n+1)\lambda}Q^{n+1}\right] \tag{8}$$

同理在 $\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}\mu}{(n+1)\lambda}Q^{n+1}}\mathrm{e}^{\lambda P}$ 左边乘以单位算符 $\mathrm{e}^{\lambda P}\mathrm{e}^{-\lambda P}=1$，再次利用式(2)得到

$$\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}\mu}{(n+1)\lambda}Q^{n+1}}\mathrm{e}^{\lambda P}=\mathrm{e}^{\lambda P}\mathrm{e}^{-\lambda P}\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}\mu}{(n+1)\lambda}Q^{n+1}}\mathrm{e}^{\lambda P}=\mathrm{e}^{\lambda P}\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}\mu}{(n+1)\lambda}(Q+\mathrm{i}\lambda)^{n+1}} \tag{9}$$

将式(9)代入式(8)，给出

$$\mathrm{e}^{\lambda P+\mu Q^n}=\mathrm{e}^{\lambda P}\exp\left[\frac{\mu}{n+1}(C_{n+1}^{1}Q^n+\cdots+(\mathrm{i}\lambda)^{n-1}C_{n+1}^{n}Q)\right]\mathrm{e}^{\frac{\mu(\mathrm{i}\lambda)^n}{(n+1)}} \tag{10}$$

这是一个新的算符恒等式. 特别地，取 $n=2$，给出

$$\mathrm{e}^{\lambda P+\mu Q^2}=\mathrm{e}^{\lambda P}\exp[\mu(Q^2+\mathrm{i}\lambda Q)]\mathrm{e}^{-\frac{\mu\lambda^2}{3}} \tag{11}$$

下面对一个更常用的算符 $\exp(fa^+a+ga^{+2}+ka^2)$ 进行分解. 记 $D=\sqrt{f^2-4kg}$ 并利用式(2)给出

$$\begin{aligned}&\exp\left(fa^+a+ga^{+2}+ka^2-\frac{D-f}{2}\right)=\\&\exp\left[Da^+\left(a-\frac{D-f}{4k}a^+\right)+k\left(a-\frac{D-f}{4k}a^+\right)^2\right]=\\&\exp\left(\frac{D-f}{4k}a^{+2}\right)\exp(Da^+a+ka^2)\exp\left(\frac{f-D}{4k}a^{+2}\right)\end{aligned} \tag{12}$$

对式(12)右边中间项进行分解得到

$$\begin{aligned}&\exp(Da^+a+ka^2)=\mathrm{e}^{\frac{ka^2}{2D}}\mathrm{e}^{Da^+a}\mathrm{e}^{-\frac{ka^2}{2D}}=\\&\exp(Da^+a)\exp\left[\frac{k(\mathrm{e}^{2D}-1)}{2D}a^2\right]\end{aligned} \tag{13}$$

比较式(13)和式(12)给出

$$\begin{aligned}&\exp(fa^+a+ga^{+2}+ka^2)=\\&\exp\left(\frac{D-f}{4k}a^{+2}\right)\exp(Da^+a)\exp\left[\frac{k(\mathrm{e}^{2D}-1)}{2D}a^2\right]\cdot\\&\exp\left(-\frac{D-f}{4k}a^{+2}\right)\exp\left(\frac{D-f}{2}\right)\end{aligned} \tag{14}$$

利用公式(参见式(18)—式(22)的推导)

$$\begin{aligned}&\exp(fa^2)\exp(ga^{+2})=\frac{1}{\sqrt{1-4fg}}\exp\left(\frac{ga^{+2}}{1-4fg}\right)\cdot\\&\exp[-a^+a\ln(1-4fg)]\exp\left(\frac{fa^2}{1-4fg}\right)\end{aligned} \tag{15}$$

可以进一步将式(14)展开为

$$\begin{aligned}&\exp(fa^+a+ga^{+2}+ka^2)=\\&\frac{\mathrm{e}^{-2kG}}{\sqrt{1-4FG}}\exp\left[\left(\frac{\mathrm{e}^{2D}}{1-4FG}-1\right)Ga^{+2}\right]\cdot\\&\exp\{[D-\ln(1-4FG)]a^+a\}\exp\left[\frac{Fa^2}{1-4FG}\right]\end{aligned} \tag{16}$$

其中定义了：

$$F=\frac{k(\mathrm{e}^{2D}-1)}{2D},\quad G=-\frac{D-f}{4k} \tag{17}$$

综上所述，这种分解指数算符的方法，不仅有助于增强大学生对量子力学课程中有关算符知识的理解和认识，而且还是没学过群论李代数知识的研究生解决一系列物理问题的必备武器.

下面给出公式(15)的推导过程. 众所周知，相干态满足超完备性关系：

$$\int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi}|z\rangle\langle z|=\int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi}:\exp(-|z|^2+z^*a+za^+-a^+a):=1 \tag{18}$$

其中 $|z\rangle=\exp(-|z|^2/2+za^+)|0\rangle$ 是相干态，$a|z\rangle=z|z\rangle$；$::$ 是正规乘积符号，在 $::$ 内部玻色算符相互对易，且可对正规乘积内部的 c 数进行积分(或微分)运算，$|0\rangle\langle 0|=:\exp(-a^+a):$ 是真空投影算符的正规乘积形式(详细讨论可见文献[6]). 利用有序算符内的积分技术[7,8]以及式(18)可以进行如下计算：

$$\begin{aligned}&\exp(fa^2)\exp(ga^{+2})=\int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi}\exp(fa^2)|z\rangle\langle z|\exp(ga^{+2})=\\&\int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi}:\exp(-|z|^2+z^*a+za^+-a^+a+fz^2+gz^{*2}):=\\&\frac{1}{\sqrt{1-4fg}}\exp\left(\frac{ga^{+2}}{1-4fg}\right)\exp[-a^+a\ln(1-4fg)]\cdot\\&\exp\left(\frac{fa^2}{1-4fg}\right)\end{aligned} \tag{19}$$

这就得到了公式(15). 在式(15)的计算中用到了算符公式：

$$:\exp[(\mathrm{e}^{\lambda}-1)a^+a]:=\exp(\lambda a^+a) \tag{20}$$

和数学积分公式[9]：

$$\begin{aligned}&\int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi}\exp(h|z|^2+\eta z^*+sz+fz^2+gz^{*2})=\\&\frac{1}{\sqrt{h^2-4fg}}\exp\left(\frac{-hs\eta+s^2g+\eta^2f}{h^2-4fg}\right)\end{aligned} \tag{21}$$

式(21)的收敛条件是

$$\mathrm{Re}(h+f+g)<0,\text{或}\ \mathrm{Re}(h-f-g)<0 \tag{22}$$

参考文献：

[1] Klauder J R, Skargerstam B S. Coherent States [M]. Singapore: World Scientific, 1985.

[2] 周士勋. 量子力学教程[M]. 北京：高等教育出版社，1979.

[3] 曾谨言. 量子力学[M]. 3 版. 北京：科学出版社，2000.

[4] 马中骐，戴安英. 群论及其在物理中的应用[M]. 北京：北京理工大学出版社，1988.

(下转 16 页)

2 讨论

真空的自发辐射与外场激发引起Rabi振荡本质的区别是,激发场的能量是正的,所以相互作用的哈密顿量为$H_{\text{int}}=(\beta^{*}a^{+}+\beta a)(|\phi_2\rangle\langle\phi_1|+|\phi_1\rangle\langle\phi_2|)$,因为只有这样才能满足光子场的能量的涨落是正定的,从上述哈密顿量可以推出原子在两能级之间的Rabi振荡.而由于真空的能量涨落是负的,所以哈密顿只能写成式(3).从式(10)可以看出原子自发辐射的速率与真空涨落的强度有关.例如真空中两块间距极近的金属之间的原子自发辐射受到抑制,这是因为距离极近金属片抑制真空涨落.而谐振腔由于能够增强真空的涨落,所以在谐振腔中的原子的自发辐射大大加强[2].

参考文献:

[1] 曹昌祺.辐射和光场的量子统计理论[M].北京:科学出版社,2006:229.

[2] 张礼,葛墨林.量子力学的前沿问题[M].北京:清华大学出版社,2000:241.

A way of deducing two-level atom's spontaneous emission

LUO Yun-wen

(Department of Physics, Zhangzhou Normal University, Zhangzhou, Fujian 363000, China)

Abstract: An equation for describing interaction of atom and vacuum fluctuation is proposed, because the energy of vacuum fluctuation is negative. It can get the probability of atoms in the excited state changing with time. The relation between the atom's spontaneous emission and the strength of vacuum fluctuation is discussed.

Key words: two-level atom; atom's spontaneous emission; vacuum fluctuation

(上接5页)

[5] Scully M O, Zubairy M S. Quamtum Optics [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

[6] 范洪义.量子力学中的表象和变换理论[M].上海:上海交通大学出版社,1993.

[7] Fan H Y, Lu H L, Fan Y. Newton-Leibniz integration for ket-bra operators in quantum mechanics and derivation of entangled state representations [J]. Ann Phys, 2006, 321: 480-494.

[8] Fan H Y, Zaidi H R, Klauder J R. New approach for calculating the normally ordered form of squeeze operators [J]. Phys Rev D, 1987, 35: 1831-1834.

[9] 范洪义,吕翠红.量子力学的相空间理论[M].上海:上海交通大学出版社,2012.

A new simple approach for disentangling some exponential operators

LV Cui-hong[1], FAN Hong-yi[2], WANG Ya-wei[1]

(1. Faculty of Science, Jiangsu University, Zhenjiang, Jiangsu 212013, China;

2. Department of Material Science and Engineering, University of Science and Technology of China, Hefei, Anhui 230026, China)

Abstract: We recommend a new convenient method for disentangling some exponential operators, which can lead us to a set of new operator identities.

Key words: exponential operators; operator identities; Baker-Hausdorff formula